

به نام خدا

**بررسی کنترل پذیری، مشاهده پذیری یک سیستم هوافضایی (موشک) و
شبیه سازی با نرم افزار متلب**

نگارش: امین

شماره دانشجویی:

دی ماه ۹۷

معادلات دینامیکی موشک

معادله‌های حرکت شش درجه آزادی موشک مورد بحث دارای سه معادله نیرو و سه معادله گشتاور است [۱]:

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + wq - vr) &= X + T + g_x m, \\ m(\dot{v} + ur - wp) &= Y + g_y m, \\ m(w - uq + vp) &= Z + g_z m, \\ I_{xx}\dot{p} - (I_{yy} - I_{zz})qr + I_{yz}(r^2 - q^2) - I_{zx}(pq + \dot{r}) \\ &+ I_{xy}(rp - \dot{q}) = L, \\ I_{yy}\dot{q} - (I_{zz} - I_{xx})rp + I_{zx}(p^2 - r^2) - I_{xy}(qr + \dot{p}) \\ &+ I_{yz}(pq - \dot{r}) = M, \\ I_{zz}\dot{r} - (I_{xx} - I_{yy})pq + I_{xy}(q^2 - p^2) - I_{yz}(rp + \dot{q}) \\ &+ I_{zx}(qr - \dot{p}) = N, \end{aligned}$$

این معادله‌ها پس از مرتب سازی به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uq \\ ur \\ vp \\ vr \\ wp \\ wq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{X} + \tilde{T} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix},$$

$$\tilde{X} = \frac{X}{M}, \tilde{Y} = \frac{Y}{N}, \tilde{Z} = \frac{Z}{M}, \tilde{T} = \frac{T}{N}.$$

این معادله‌های دینامیکی موشک، نامعین و متغیر با زمان هستند. دلیل آن، تغییر سرعت و ارتفاع موشک بر حسب زمان است که موجب تغییر عدد ماخ و فشار دینامیکی می شود. تغییر عدد ماخ باعث تغییر ضریب‌های آیرودینامیکی و تغییر فشار دینامیکی باعث تغییر نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی (حتی در صورتی که ضریب‌های آیرودینامیکی ثابت باشند) می شود. بنابراین در معادله‌های دینامیکی نامعین و متغیر با زمان هستند که در شرایط مختلف پروازی تغییر می کنند.

برای استخراج توابع تبدیل موشک از معادلات حرکت شش درجه آزادی خطی سازی حول مقادیر $\dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0, \dot{p}_0, \dot{q}_0, \dot{r}_0, \delta_{0a}, \delta_{0e}, \delta_{0r}$ انجام می شود و پس از ساده سازی های لازم با فرضیاتی مانند قابل صرف نظر بودن افزایش پسای ناشی از انحراف ایلرون و ... روابط توابع تبدیل موشک به صورت زیر محاسبه می گردد.

۱- تابع تبدیل میان نرخ پیچ و انحراف الویتور

$$\frac{q}{\delta_e} = \frac{\tilde{M}_\delta s - \tilde{M}_\delta \tilde{Z}_w + \tilde{M} \tilde{Z}_\delta}{s^2 - (M_q + \tilde{Z}_w)s + \tilde{M}_q \tilde{Z}_w - \tilde{M}_w \tilde{Z}_q - \tilde{M}_w u_0}.$$

۲- تابع تبدیل میان شتاب عرضی و انحراف الویتور.

$$\frac{a_z}{\delta_e} = \frac{\tilde{Z}_\delta s^2 + (\tilde{M}_\delta \tilde{Z}_q - \tilde{M}_q \tilde{Z}_\delta)s + \tilde{M}_\eta \tilde{Z}_w u_0 - \tilde{M}_w \tilde{Z}_\delta u_0}{s^2 - (\tilde{M}_q + \tilde{Z}_w)s - \tilde{M}_w u_0 - \tilde{M}_w \tilde{Z}_q + \tilde{M}_q \tilde{Z}_w}$$

$$\tilde{M} = \frac{M}{I_{yy}}, \tilde{M}_\delta = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \delta}, \tilde{M}_w = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial w}, \tilde{M}_q = \frac{\partial \tilde{M}}{\partial q}$$

$$\tilde{Z} = \frac{Z}{M}, \tilde{Z}_\delta = \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial \delta}, \tilde{Z}_w = \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial w},$$

که در آن α, q متغیرهای حالت و a_z خروجی (شتاب نرمال) است. پارامترهای ثابت در رابطه های فوق عبارت است از:

| محور های دستگاه بدنی | محور رول | محور پیچ | محور یاء |
|---------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | X | Y | Z |
| مولفه های بردار سرعت در هر محور | p | q | r |
| مولفه نیرو های آیرودینامیک در هر محور | u | v | w |
| گشتاور در هر محور | L | M | N |
| ممان اینرسی حول هر محور | I _{xx} | I _{yy} | I _{zz} |
| ممان اینرسی | I _{yz} | I _{zx} | I _{xy} |
| شتاب های طولی و جانبی | a _x | a _y | a _z |
| شتاب ثقل در هر محور | g _x | g _y | g _z |
| پیشرانده | T | - | - |

محدوده تغییر پارامتر های عدد ماخ و زاویه حمله بصورت $0 \leq M \leq 3$ و $-15^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$ فرض می شود. از اینرو یک نقطه کار به ترتیب در $(\alpha, M) = (5^\circ, 2.5)$ در نظر گرفته می شود. توابع تبدیل موشک در این نقطه کار به صورت زیر است:

مدل خطی در نقطه کار:

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = \frac{711.1 s + 1896}{s^2 + 6.438s + 900.4}$$

$$\frac{a_z(s)}{q(s)} = \frac{-51.96s^2 - 1832s - 1.492e006}{s^2 + 6.438s + 900.4}$$

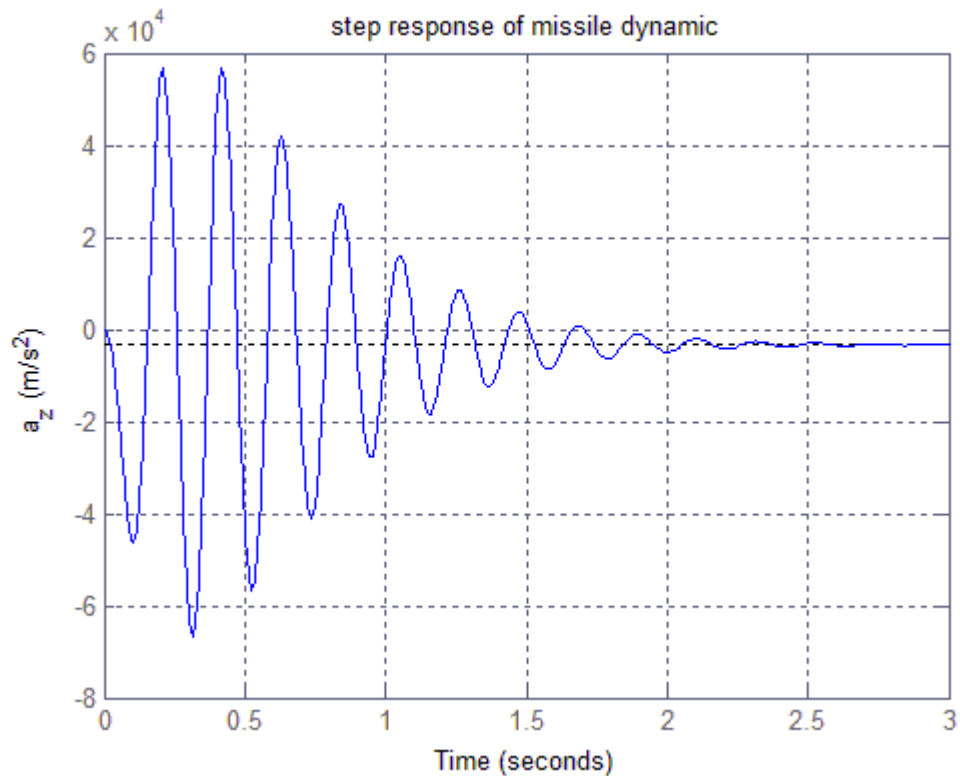
مدل فضای حالت بدست آمده بصورت زیر است:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

| | |
|----------|---------------------------------------|
| ماتریس A | 1.0e+05 * |
| | -0.0001 -0.0184 -0.1158 -8.1070 |
| | 0.0000 0 0 0 |
| | 0 0.0000 0 0 |
| | 0 0 0.0000 0 |
| ماتریس B | 1 |
| | 0 |
| | 0 |
| | 0 |
| ماتریس C | 1.0e+09 * |
| | -0.0000 -0.0014 -1.0130 -2.6920 |

پاسخ پله سیستم فوق بصورت زیر است.



بررسی کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم

به منظور بررسی کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم بایستی ماتریس های کنترل پذیری و مشاهده پذیری را مطابق روابط زیر تشکیل داده و در صورت رتبه کامل بودن آنها سیستم کنترل پذیر و/یا کنترل پذیر است.

$$C_o = [B, AB, \dots, A^n B], \quad O_o = [C^T, A^T C^T, \dots, A^{T^n} C^T]$$

منظور از رتبه کامل بودن بصورت رابطه زیر است که در آن n بعد سیستم و مرتبه ماتریس A است.

$$\text{Rank}(C_o) = n, \text{Rank}(O_b) = n$$

نرم افزار مربوطه بصورت زیر است.

```
clc
clear all
b1=[0 711.1 1896];a1=[1 6.43 900.4];
b2=[-51.96 -1832 -1.42e6];a2=[1 6.43 900.4];
```

```

g1=tf(b1,a1);%transfer function q(pitch rate) t0 delta(deflection)
g2=tf(b2,a2);%transfer function az(Normal acceleration) t0 q(pitch rate)
g=g1*g2%main system:transfer function az(Normal accerlatin) t0
delta(deflection)
b=[0 -3.695e4 -1.401e6 -1.013e9 -2.692e9];a=[1 12.86 1842 1.158e4 8.107e5];
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a);
figure(1)
step(g)%step response of missile dynamic in pitch chanel
ylabel('a_z (m/s^2)')
grid
title('step response of missile dynamic')
sys=ss(A,B,C,D);%main system:transfer function az(Normal accerlatin) t0
delta(deflection) in state space
n=length(A);
%%controlability and observeability check
Co = ctrb(sys);%controlability matrix
if rank(Co)==n;
    disp(' system is controlable')
else
    disp(' system is uncontrollable')
end
Ob=obsv(sys);%observabillty matrix
if rank(Ob)==n;
    disp(' system is observeable')
else
    disp(' system is unobservable')
end

```

مراجع

[1]. Farhan A, Faruq. and Thanh, Lan Va. "Mathematical Model for Missile Autopilot Design ", Weapon Systems Division,DSTO-TN-044