Tarbiat Modares University
May 13-15, 2008

شناسایی سیستم های مکانیکی غیر خطی با استفاده از موجک‌های هار

روح الله دوست حسینی
دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان
Doosthoseyni@ec.iut.ac.ir

جواد عسگری
دانشکده برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی اصفهان
J-askari@cc.iut.ac.ir

چکیده – اکثر سیستم‌های واقعی رفتار غیرخطی داشته و در اکثر موارد خطی‌سازی در مدل کردن سیستم نتایج رضایت بخشی در بر ندارد. از جمله نمونه های عملی که پارامترهای آن در مدل‌های غیرخطی سیستم‌های مکانیکی استفاده شده‌اند را می‌توان به میرایی کولومب و سختی سه بعدی اشاره نمود. در این مقاله از موجک‌های هار در معرفی سیگنال‌های ورودی و خروجی و دینامیک سیستم غیر خطی استفاده شده است. این توابع به سادگی با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال کامل می‌شود. در نتیجه، می‌توان معادلات دیفرانسیل غیرخطی حرکت را به معادلات جبری تبدیل کرد. بعد از انجام محاسبات ریاضی پارامترهای خطی و غیرخطی نامعلوم مشخص می‌شوند، شبیه سازی‌های عددی، شامل سیستم مکانیکی با یک درجه آزادی، کارآیی روش فوق را تأیید می‌کند. در پایان نیز نتایج بدست آمده در این روش با نتایج روش‌های مشابه مورد بررسی قرار گرفته‌است.

کلید واژه- سیستم‌های غیر خطی، شناسایی پارامتر، رونگ-کوتا، موجک هار.

۱- مقدمه

در حالت کلی سیستم‌های واقعی رفتارهای دینامیکی غیرخطی دارند. اکثر این سیستم‌ها براساس روش‌هایی که در تئوری سیستم‌های خطی وجود دارند مطالعه می‌شوند. خطای حاصل از این روش به درجهٔ غیرخطی بودن سیستم تحت آنالیز بستگی دارد. در بسیاری از موارد روش‌های خطی سازی نتایج مطلوبی در بر ندارند.

مرجع [۱] یک روش برای شناسایی مدل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی با یک درجه آزادی (SDOF)[1] ارائه داده است. این روش براساس روش‌ها و تکنیک‌های رگرسیون با تلفیق دو بعدی توابع متعامد برای تعیین یک تخمین برای نیروهای ذخیره کننده کلی در برابر متغیرهای حالت سیستم می‌باشد. یک روش شناسایی پارامتری در[۲] بیان شده است که در آن از سری‌های زمانی برای استخراج خصوصیات دینامیکی سیستم بکار گرفته شده است و پاسخ زمانی آنرا پیش‌بینی کرده است و در آن سیستم‌های اصطکاک کولمبی و سختی غیرخطی بطور جداگانه و یا همزمان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این روش شناسایی پارامتری از مدل شتاب، سرعت و مکان (AVD)[2] استفاده می‌کنند و نیروی اصطکاک را با استفاده از سرعت مدل می‌کنند. در [۳] یک روش برای تخمین مستقیم پارامترهای فیزیکی (جرم، سختی، میرایی) با ساختار غیرخطی یا خطی با استفاده از اطلاعات زمانی اندازه‌گیری شده ارائه گردیده است. در این روش، ساختار توسط یک سیستم پارامتری تحمیلی مساوی، با ماتریس‌های پارامتری متقارن مدل می‌شود. پارامترهای نامعین با استفاده از تکنیک حداکثر مربعات[3] تخمین زده می‌شوند. همچنین در [۴] یک روش برای شناسایی پارامترهای سیستم‌های با چند درجه آزادی خطی و در [۵] برای سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است.

توابع متعامد از اواسط دههٔ ۱۹۷۰ برای شناسایی

[1] Single Degree of Freedom

[2] Acceleration, Velocity and Displacement
[3] Least-square

سیستم‌های دینامیکی با استفاده از روش مستقیم[4] استفاده شد [۶]. اخیراً نیز از این توابع به دلیل کامل بودن و ویژگی‌های فراوان آنها در کنترل سیستم‌ها، شناسایی و آنالیز آنها بکار برده شده‌اند([۷]و[۸]). در حالت کلی توابع متعامد به سه گروه اصلی تقسیم‌بندی می‌شوند:

- چند جمله‌ای‌های متعامد نظیر لژاندر، چبی شف و لاگوئر،
- توابع سینوسی-کسینوسی (تبدیل فوریه)،
- توابع متعامد، ثابت و قطعه قطعه پیوسته نظیر بلاک پالس و موجک هار.

بسته به اینکه سیستم از چه نوعی باشد، از هر کدام از این سه گروه با تقریب‌های مختلف استفاده می‌شود. با توجه به اینکه می‌توان با استفاده از توابع قطعه قطعه پیوسته متعامد و کامل توابع پیوسته و گسسته را تقریب زد، استفاده از این گروه نسبت به سایر توابع متعامد علی‌رغم دقت پایین‌تر از اهمیت بیشتری برخوردار است. در [۹] یک روش برای حل مسائل تغییراتی با استفاده از تکنیک موجک‌های هار ارائه گردیده است. استفاده از موجک هار در مسائل کنترلی مانند کنترل بهینه سیستم‌های متغیر با زمان نیز بکار رفته است ([۱۰] و [۱۲]).

در [۱۱] از چند نمونه از توابع متعامد مانند فوریه، چبی شف، لژاندر، ژاکوبی و بلاک پالس برای شناسایی سیستم‌های مکانیکی غیر خطی با یک و یا دو درجه آزادی استفاده شده است. از آن جهت که در عمل تقریب و شناسایی سیستم‌ها با استفاده از توابع متعامد قطعه قطعه پیوسته حائز اهمیت است، در این مقاله با استفاده از موجک‌های هار به شناسایی سیستم‌های مکانیکی غیر خطی با یک درجه آزادی پرداخته شده است. روش ارائه شده یک روش عددی برای حل مسائل، بویژه مسائلی که حل تحلیلی ندارند و یا دارای حل تحلیلی پیچیده‌ای هستند، می‌باشد. از جمله ویژگی‌های این روش تبدیل دینامیک دیفرانسیلی به یک معادله جبری ساده است که حل آن، بسیار ساده‌تر است؛ در ضمن همانطور که گفته شد خصلت گسسته بودن موجک هار در اکثر سیستم‌های گسسته نتایج بهتری در بر داشته است. همچنین برتری موجک‌های هار نسبت به توابع بلاک پالس به خاطر نوع تعریف این توابع می‌باشد. نتایج شبیه سازی شده در این روش نیز با نتایج بدست آمده با استفاده از روش بلاک پالس در [۱۱] مقایسه شده‌اند.

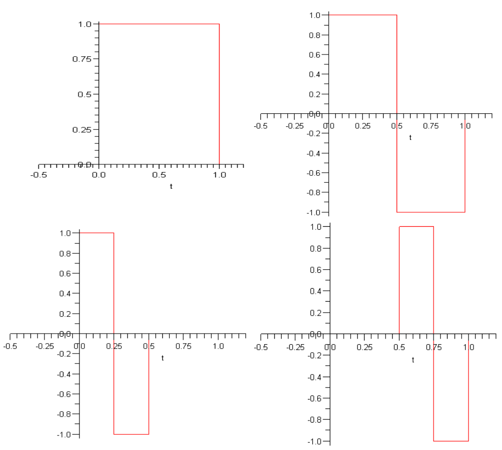
در بخش بعد به معرفی توابع موجک هار و روابط مورد استفاده در روش مستقیم پرداخته می‌شود. در بخش ۳ شناسایی پارامترهای دینامیکی سیستم مکانیکی با استفاده از موجک هار ارائه گردیده است. حل یک مثال با یک درجه آزادی و بررسی نتایج شبیه سازی و مقایسه با نتایج موجود در [۱۱]، در بخش ۴ بیان شده است.

۲- موجک هار

یک مجموعه از موجک‌های هار، یک گروه از موجک‌های مربعی روی بازه $[0,1)$ با فرض $H_0(t)=1$ به صورت

$$H_n(t)=\begin{cases}1 & 2^{-j}k\le t<2^{-j}(k+\frac{1}{2})\\ -1 & 2^{-j}(k+\frac{1}{2})\le t<2^{-j}(k+1)\\ 0 & \text{Other wise}\end{cases}\qquad (۱)$$

بیان می‌شود که در آن $j=[\log_2 n]$ و $k=n-2^j$ و $n=1,2,...$. چهار تابع اول این توابع در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱: چهار تابع اول از موجک‌های هار

[4] Direct method

یک مجموعه از $m=2^n$ تابع هار را به شکل یک ماتریس $m\times m$ نیز می‌توان نشان داد.

$$H_m \triangleq \begin{bmatrix} h_0(t) \\ \vdots \\ h_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0(\frac{1}{2m}) & \cdots & h_0(\frac{2m-1}{2m}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m-1}(\frac{1}{2m}) & \cdots & h_{m-1}(\frac{2m-1}{2m}) \end{bmatrix} \quad (۲)$$

به عنوان مثال برای چهار تابع اول داریم

$$H_4 \triangleq \begin{bmatrix} h_0(t) \\ \vdots \\ h_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (۲)$$

ماتریس H_m یک ماتریس معکوس پذیر است و یک رابطه ساده برای محاسبه آن عبارت است از

$$H_m^{-1} = \left(\frac{1}{m}\right) H_m^T diag(1,1,2,2,\underbrace{2^2,...,2^2}_{\text{بار } 2^2},...,\underbrace{2^{n-1},...,2^{n-1}}_{\text{بار } 2^{n-1}}) \quad (۳)$$

با توجه به خاصیت تعامد و کامل بودن موجک‌های هار، یک تابع حقیقی $f(t)\in L^2[0,1]$ را می‌توان برحسب توابع هار به صورت زیر تقریب زد.

$$f(t) \cong \hat{f}_m(t) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n h_n(t) \quad (۴)$$

ضرایب c_n نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$c_n^T = e^T H_m^{-1} \quad (۵)$$

که در آن

$$e^T = \left[f(\frac{1}{2m}) \;\; f(\frac{3}{2m}) \cdots f(\frac{2m-1}{2m}) \right] \quad (۶)$$

در بسیاری از مسائل نیاز به تقریب انتگرال توابع مانند $f(t)\in L^2[0,1]$ توسط توابع متعامد بر حسب خود آن توابع می‌باشد که نیاز به تعریف ماتریس عملیاتی انتگرال است.

$$\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \cong Pf(t) \quad (۷)$$

به طور کلی برای هر $m=2^n$، با فرض اینکه

$$P_1 = \left[\frac{1}{2}\right], P_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۸)$$

P_m با رابطه بازگشتی زیر داده می‌شود.

$$P_m = \frac{1}{2m}\begin{bmatrix} 2mP_{m/2} & -H_{m/2} \\ H_{m/2}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (۹)$$

به همین ترتیب برای انتگرال مرتبه n یک تابع نیز داریم

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{\text{بار } n} f(t)(d\tau)^n \cong P^n f(t). \quad (۱۰)$$

۳- شناسایی پارامترهای سیستم با استفاده از موجک هار

با توجه به آنچه در بخش قبل بیان شد، یک روش برای شناسایی سیستم‌ها ارائه می‌دهد، به گونه‌ای که یک مجموعه از معادلات دیفرانسیلی را می‌توان به فرم معادلات جبری انتقال داد که باعث سادگی شناسایی پارامترهای نامعین می‌شود. این ویژگی روش موجود، وجه تمایز با دیگر روش‌های شناسایی سیستم می‌باشد.

معادله حرکت یک سیستم غیر خطی با n درجه آزادی و نیروی خارجی $f(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + g(x(t),\dot{x}(t)) = f(t) \quad (۱۱)$$

که $[K]$ $[C]$ و $[M]$ ماتریس‌های مرتبه n جرم، میرایی و سختی، $\{x(t)\}$ بردار مسافت $\{g(x(t),\dot{x}(t)\}$ بردار نیروی ذخیره غیر خطی که در حالت کلی تابع مسافت و سرعت می‌باشد و $\{f(t)\}$ یک بردار نیروی تحریک خارجی می‌باشد. بسته به طبیعت و بزرگی نیروهای غیرخطی در $\{g(x(t),\dot{x}(t)\}$ و سطح تغییرات سیستم، بخش غیرخطی می‌تواند حذف شود و آنالیز یک مدل خطی با خطاهای ناچیز را در نظر گرفت. به هر حال در این مقاله، یک فرم غیر خطی برای آن در نظر گرفته شده است. بردار نیروی غیرخطی به گونه‌های مختلفی قابل فرض است. بدون از بین رفتن کلیت مسأله، یک فرمول برای یک سیستم با یک درجه آزادی به همراه سختی سه بعدی و اصطکاک و کشسانی ارائه می‌شود. در این حالت معادله فوق به فرم زیر نوشته می‌شود

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)+K_3x(t)^3+ \\ f_d\,\mathrm{sign}(\dot{x}(t))=f(t) \qquad (۱۲)$$

که در آن K_3 اثر سختی و f_d نیروی اصطکاک و کشسانی هستند که

$$\mathrm{sign}(\dot{x}(t))=\begin{cases}+1 & for \quad \dot{x}(t)>0\\ 0 & for \quad \dot{x}(t)=0\\ -1 & for \quad \dot{x}(t)<0\end{cases} \qquad (۱۳)$$

با فرض $y(t)=x(t)^3$ و $z(t)=\mathrm{sign}(\dot{x}(t))$، دینامیک سیستم برابر است با

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)+K_3y(t)+f_d z(t)=f(t) \qquad (۱۴)$$

با دو مرتبه انتگرال گیری در بازهٔ $[0,t]$ خواهیم داشت

$$M(x(t)-x(0)-\dot{x}(0)t)+C\left(\int_0^t x(\tau)d\tau-x(0)t\right)+ \\ K\int_0^t\int_0^t x(\tau)d\tau^2+K_3\int_0^t\int_0^t y(\tau)d\tau^2+f_d\int_0^t\int_0^t z(\tau)d\tau^2= \\ \int_0^t\int_0^t f(\tau)d\tau^2 \qquad (۱۵)$$

که $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ شرایط اولیه مسافت و سرعت می‌باشند. سیگنال‌های $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$و $f(t)$ با تقریب سری توابع هار با r جمله اول از آن به فرم زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} x(t)&\cong X\varphi(t)\\ y(t)&\cong Y\varphi(t)\\ z(t)&\cong Z\varphi(t)\\ f(t)&\cong F\varphi(t)\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

که در آن بردار $\varphi(t)$، r پایه اول توابع هار و بردارهای X، Y، Z و F ضرایب مربوط به توابع متناظر بوده که از رابطه ۵ بدست می‌آیند. با جایگذاری این روابط در دینامیک سیستم داریم

$$M(X\varphi(t)-x(0)-\dot{x}(0)t)+C\left(\int_0^t X\varphi(t)d\tau-x(0)t\right)+ \\ K\int_0^t\int_0^t X\varphi(t)d\tau^2+K_3\int_0^t\int_0^t Y\varphi(t)d\tau^2+ \\ f_d\int_0^t\int_0^t Z\varphi(t)d\tau^2=\int_0^t\int_0^t F\varphi(t)d\tau^2 \qquad (۱۷)$$

با توجه به اینکه $e^T\varphi(t)=1$ و $t=e^TP\varphi(t)$، که e یک بردار با المان‌های ثابت است که با استفاده از توابع هار $\{e\}=[1\ 0\ \cdots\ 0]^T$ خواهد شد. در نتیجه

$$M(X\varphi(t)-x(0)e^T\varphi(t)-\dot{x}(0)e^TP\varphi(t))+ \\ C\left(\int_0^t X\}\varphi(t)\}d\tau-x(0)e^TP\varphi(t)\right)+K\int_0^t\int_0^t X\varphi(t)d\tau^2+ \\ K_3\int_0^t\int_0^t Y\varphi(t)d\tau^2+f_d\int_0^t\int_0^t Z\varphi(t)d\tau^2=\int_0^t\int_0^t F\varphi(t)d\tau^2 \qquad (۱۸)$$

با بکارگیری ویژگی انتگرال برای موجک‌های هار و حذف $\varphi(t)$ در طرفین رابطه معادله جبری زیر بدست می‌آید

$$\begin{bmatrix} M\\ -Mx(0)\\ -M\dot{x}(0)-Cx(0)\\ C\\ K\\ K_3\\ f_d\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X\\ e^T\\ e^TP\\ XP\\ XP^2\\ YP^2\\ ZP^2\end{bmatrix}=FP^2 \qquad (۱۹)$$

با فرض

$$H=\begin{bmatrix} M\\ -Mx(0)\\ -M\dot{x}(0)-Cx(0)\\ C\\ K\\ K_3\\ f_d\end{bmatrix}^T \qquad (۲۰)$$

و

$$J=\begin{bmatrix} X\\ e^T\\ e^TP\\ XP\\ XP^2\\ YP^2\\ ZP^2\end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

و

$$E=FP^2 \qquad (۲۲)$$

دینامیک سیستم با استفاده از تقریب موجک هار برابر است با

$$HJ = E \Rightarrow H = EJ^T (JJ^T)^{-1} \qquad (۲۳)$$

رابطه فوق یک تخمین از ماتریس H را با استفاده از روش حداقل مربعات ارائه می‌دهد. این معادله با استفاده از روش تجزیه مقدار ویژه حل می‌شود و پارامترهای نامعین نظیر مسافت و شرایط اولیه سرعت بدست می‌آیند. این نکته حائز اهمیت است که در معادله فوق، هیچ نیازی به اطلاعاتی در مورد پارامترهای مدل و فیزیکی سیستم مکانیکی نیست، که وجه تمایز این روش با دیگر تکنیک‌های شناسایی که در این مقاله اشاره شده می‌باشد.

رابطهٔ فوق برای سیستم با یک درجه آزادی به همراه سختی مکعبی و میرایی مختلط (اصطکاک و کشسانی) ارائه گردید. زمانی که یک سیستم با چند درجه آزادی وجود داشته باشد، توسعه روش فوق مشابه آنچه که بیان شده می‌باشد، بجز در حالی که سختی معکبی در نظر گرفته شود. در این حالت، مسأله متفاوت است، زیرا بخش های غیر خطی در معادلات حرکت ظاهر می‌شوند. به هر حال تکنیک کلی مشابه است.

چنین به نظر می‌رسد که از معادلات فوق پارامترهای نامعین بصورت مجزا شناسایی شوند و به صورت ترکیبی از آنها باشد. به هر حال، اگر جرم یا دیگر پارامتر کاملاً معین باشد تمام پارامترها بصورت مجزا قابل شناسایی می‌باشند.

۴- حل یک مثال با یک درجه آزادی

در این بخش یک سیستم مکانیکی با یک درجه آزادی به همراه میرایی اصطکاک و کشسان در نظر گرفته می‌شود.در ابتدا فرض کنید که پارامترهای دقیق سیستم برابرند با

$$M = 1kg,\ \ C = 20Ns/m,\ \ K = 10000,\ \ f_d = 1\, and\, 3N \qquad (۲۴)$$

ابتدا یک تحریک سینوسی $f(t) = F_0 \sin(2\pi f_0 t)$ با مقدار مؤثر ۱۰ نیوتن و با فرکانس ۱۰ تا ۲۰ هرتز استفاده می‌شود[۱۱]. پاسخ با توجه به $f_d = 1N$ و با فرکانس ۱۷۰۰ هرتز با استفاده از روش رونگ- کوتا[5] مرتبه ۴ نمونه برداری می‌شود. سپس با استفاده از روش مستقیم و با بکارگیری موجک‌های هار و با توجه به پاسخ بدست آمده پارامترهای فوق تقریب زده می‌شوند. لازم به ذکر است که در این مثال، $k_3 = 0$ فرض شده است. جدول ۱ نتایج بدست آمده با استفاده از این روش را به همراه نتایج موجود در مرجع [۱۱] با استفاده از توابع بلاک پالس نشان می‌دهد.

جدول ۱: بررسی نتایج شبیه سازی با فرض اولیه $f_d = 1$

	M(kg)	C(Ns/m)	K(N/m)	$f_d(N)$
B-P m=512	0.993	20.18	10045	1.004
Haar m=512	0.995	20.13	10034	1.004

اگرچه نتایج بدست آمده با استفاده از موجک هار با تعداد جملات مساوی، در کل بهتر از بلاک پالس است، ولی با نتایج مشابه که با بکارگیری توابع متعامد نظیر فوریه، چبی شف و لژاندر با تعداد جملات کمتری انجام شده است از دقت پایین‌تری برخوردار است[۱۱]. این مطلب بدان دلیل است که پاسخ سیستم پیوسته بوده و درنتیجه تقریب با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد پیوسته دقت بهتری دارد؛ که البته از مزیت موجک هار که جزء توابع قطعه قطعه پیوسته است کاسته نمی‌شود. زمانیکه مقدار نیروی اصطکاک به ازای نیروی تحریک ثابت افزایش داده شود(افزایش نسبت $\frac{f_d}{F_{rms}}$)، در حالت کلی خطا در پارامترهای شناسایی شده بزرگتر می‌شود. این مطلب در جدول ۲ برای $f_d = 3N$ و نیروی تحریک مشابه نشان داده شده است به همراه نتایج موجود در [۱۱] با بکارگیری بلاک پالس ارائه شده است.

[5] Rung-Kutta

جدول ۲: بررسی نتایج شبیه سازی با فرض اولیه $f_d = 3$

	M(kg)	C(Ns/m)	K(N/m)	$f_d\,(N)$
B-P m=512	0.987	20.47	10012	2.980
Haar m=512	0.989	20.41	10009	2.983

این نکته حائز اهمیت است که اگر یکی از پارامترها که در مرحلهٔ شناسایی استفاده می‌شوند را معین و ثابت در نظر بگیریم، بطور کلی نتایج بهتری بدست می‌آیند. به عنوان مثال با فرض ثابت نگه داشتن ضریب k با مقدار ۹۹۹۷ برای حالت اول و ۹۹۹۵ برای حالت دوم نتایج همانند جداول ۳ و ۴ بدست می‌آیند.

جدول ۳: بررسی نتایج شبیه سازی با فرض اولیه $f_d = 1$ و $k = 9997$

	M(kg)	C(Ns/m)	$f_d\,(N)$
B-P m=512	0.995	19.96	1.001
Haar m=512	0.997	19.97	1.001

جدول ۴: بررسی نتایج شبیه سازی با فرض اولیه $f_d = 3$ و $k = 9995$

	M(kg)	C(Ns/m)	$f_d\,(N)$
B-P m=512	0.995	19.97	2.978
Haar m=512	0.996	19.97	2.981

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش برای شناسایی پارامتر سیستم‌های غیرخطی با یک یا چند درجه آزادی، بر اساس روش مستقیم و با بکارگیری موجک‌های هار ارائه گردید. حسن استفاده از این روش، استفاده از خاصیت انتگرال آنها می‌باشد که معادلات دیفرانسیلی را به روابط جبری تبدیل می‌سازد. از آنجا که تقریب موجک‌های هار نسبت به توابع بلاک پالس که هر دو از گروه توابع متعامد قطعه قطعه پیوسته هستند نتایج بهتری در بر دارد، نتایج بهتری بدست آمد؛ صحت این مطلب با شناسایی یک نمونه از سیستم‌های مکانیکی غیرخطی و شبیه‌سازی آن و مقایسه با نتایج موجود در [۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. این روش برای تمام سیستم‌های با انواع ویژگی‌های غیرخطی و در حالت گسسته و پیوسته قابل استفاده است، مشروط به اینکه مدل ریاضی آنها موجود و مشخص باشد.

مراجع

[1] S. F. Masri and T. K. Caughey, "A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problem" *J. Appl. Math.Tran. ASME,* Vol. 46, pp. 433-447, 1979.

[2] Q. Chen and G. R. Tomlinson, "Parametric identification of system with dry friction and nonlinear stiffness using a time series model" *ASME J. Vib. Acoust*. Vo. 118, pp. 252-263, 1996.

[3] K. S. Mohammad, K. Worden and G. R. Tomlinson, "Direct parameter stimation for linear and non-linear structures" *J. Sound Vib.* , Vol. 152, No. 3, pp. 471-499, 1992.

[4] R. P. Pacheco and V. Steffen Jr., "Using orthogonal functions for identification and sensitivity analysis of mechanical system" *J. Vib. Control*, Vol. 8, No. 7, pp. 993-1021, 2002.

[5] R. P. Pacheco and V. Steffen Jr., "Nonlinear identification of mechanical system using orthogonal functions" *Proceedings (in CD) of the fourth International Conference on Inverse problems in Engineering: Theory and Practice, Angra dos Reis, Rio de Jenriro, Brazil*, pp. 26-31, May, 2002.

[6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Time-domain synthesis via Walsh functions" *Proc. IEE*, Vol. 122, No. 5, pp. 565-570, 1975.

[7] H. R. Marzban and M. Razzaghi, "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials" *J. Franklin Institute*, Vol. 341, pp. 279-293, 2004.

[8] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "State analysis of time-varying singular nonlinear systems via Haar wavelets" *J. Math. And Computers in Simulation*, Vol. 51, pp. 91-100, 1999.

[9] C. H. Hsiao, "Haar wavelet direct method for solving variational problems" *J. Math. And Computers in Simulation*, Vol. 64,pp. 569-585, 2004.

[10] C. H. Hsiao and W. J. Wang, "Optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets" *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 103, No. 3, pp. 641-655, 1999.

[11] R. P. Pacheco and V. Steffen Jr., "On the identification of non-linear mechanical systems using orthogonal functions" International J. Nol-Linear Mechanics, Vol. 39, pp. 1147-1159, 2004.

[۱۲] طاهره شجاعی زاده، حمید رضا مرزبان و جواد عسگری، آنالیز کنترل بهینه سیستم‌های منفرد متغیر با زمان با استفاده از موجک هار، پایان نامه کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۳.